

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

APOSTILA 4

FUNÇÕES E GRÁFICOS: Fundamentos: conceito de função, lei de formação de uma função, Função afim; Função quadrática; Função exponencial; Função logarítmica; Função modular; Gráficos em geral.

FUNDAMENTOS.....	3
Conceito de função.....	3
Classificação das funções.....	3
Função sobrejetora.....	3
Função injetora.....	4
Função bijetora.....	4
Função par.....	4
Função ímpar.....	5
Material complementar:.....	5
Lei de formação.....	5
Observação:.....	6
Material complementar:.....	6
Função Afim ou função do 1º grau.....	6
Observação.....	6
Gráfico de uma função afim.....	6
Material complementar:.....	8
Exercícios.....	8
Função quadrática ou função do 2º grau.....	9
Observação.....	10
Gráfico de uma função quadrática.....	10
Material complementar:.....	13
Exercícios.....	13
Função exponencial.....	15
Observação.....	15
Gráfico de uma função exponencial.....	15
Material complementar:.....	17
Exercícios.....	17
Função logarítmica.....	18
Observação.....	19
Gráfico de uma função logarítmica.....	19
Propriedades de operações com logaritmos.....	20
Material complementar:.....	21
Exercícios.....	21
Função modular.....	23
Observações.....	23



PROFMAT



Universidade Federal
de São João del-Rei

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

Gráfico de uma função modular.....	23
Propriedades de operações com módulo.....	1
Material complementar:	1
Exercícios	1
Gráficos.....	1
Gráfico de barras.....	1
Gráfico de linha.....	1
Gráfico de setores.....	1
Material complementar:	1
Exercícios	1
GABARITO	1

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO FUNDAMENTOS

Conceito de função

Definição: uma regra matemática f é dita uma **função real de uma variável real** se associa a cada número $x \in A \subseteq \mathbb{R}$ um único elemento real $y \in B \subseteq \mathbb{R}$, ou seja,

$$f: A \rightarrow B$$

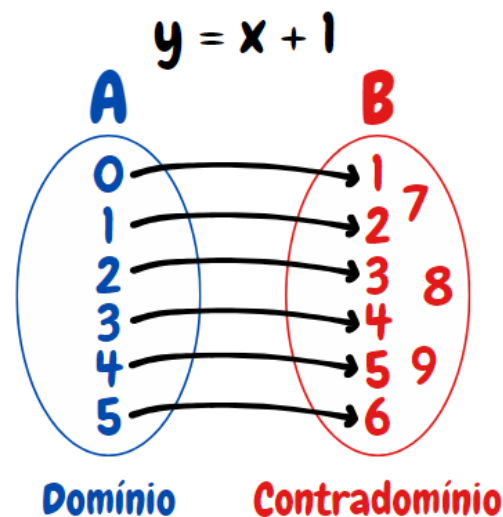
$$x \mapsto y = f(x)$$

O conjunto A é dito **domínio** da função f e o conjunto B é o **contradomínio** da função f .

Ou seja, uma função é uma relação matemática que associa cada elemento x pertencente ao conjunto A a um único elemento y pertencente ao conjunto B . Então, para cada valor de x , temos um valor correspondente y e isso quer dizer que y está em função de x . Assim, dizemos que x é a **variável independente** e y é a **variável dependente**.

O domínio (D_f) da função ao lado é o conjunto $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ (perceba que é o conjunto de todos os elementos que está “saindo” a setinha). Mas observe a setinha e o contradomínio (CD_f)

$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ (o contradomínio é todo o conjunto B): nem todos os elementos de B “recebem” uma setinha. Todos os elementos que recebem a setinha são elementos do conjunto **imagem** de f (a imagem de f é um subconjunto de seu contradomínio), então a imagem é o conjunto $Im_f = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

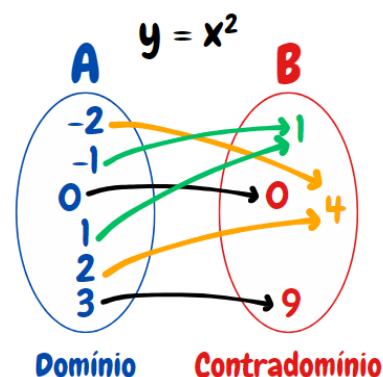


Classificação das funções

As funções podem ser classificadas de acordo com a relação dos seus conjuntos domínio, contradomínio e imagem. Elas também podem ser classificadas de acordo com as suas propriedades.

Função sobrejetora

Uma função é **sobrejetora** quando todos os elementos do contradomínio também são elementos do conjunto imagem. Ou seja,



CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

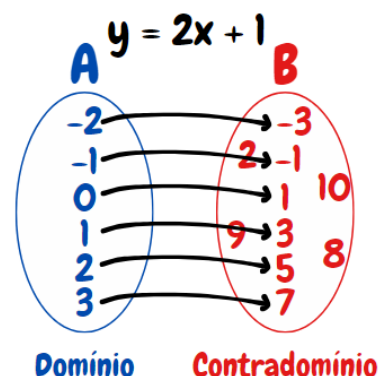
$CD_f = Im_f$. Ou seja, todo elemento de B é imagem (recebe a setinha) de pelo menos um elemento de A.

Na imagem ao lado, temos **domínio** $D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, **contradomínio** = **imagem**: $CD_f = Im_f = \{1, 0, 4, 9\}$.

Função injetora

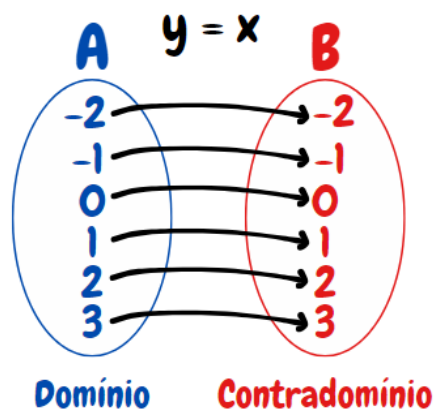
Uma função é **injetora** quando todos os elementos do conjunto imagem possuem apenas uma correspondência (recebe a setinha) com algum elemento do domínio. Ou seja, todos os elementos de A têm correspondente diferente em B.

Na imagem ao lado, temos **domínio** $D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, **contradomínio** $CD_f = \{-3, -1, 1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$ e **imagem** $Im_f = \{1, 0, 4, 9\}$.



Função bijetora

Uma função é **bijetora** quando ela é sobrejetora e injetora ao mesmo tempo.



Na imagem ao lado, temos **domínio** $D_f = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ e **contradomínio** = **imagem**: $CD_f = Im_f = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$.

*É uma coincidência que $D_f = CD_f = Im_f$.

Função par

Uma função **par** é uma função que tem a propriedade $f(-x) = f(x)$, ou seja, os elementos $-x$ e x têm a mesma imagem. Um bom exemplo é a função $y = x^2$.

$y = x^2$	
x	y
-1	1
1	1
-2	4
2	4

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

Função ímpar

Uma função **ímpar** é uma função que tem a propriedade $f(-x) = -f(x)$.

Um bom exemplo é a função $y = x^3$.

$y = x^3$	
x	y
- 1	- 1
1	1
- 2	- 8
2	8

Material complementar:

Funções reais, domínio e imagem:
https://youtu.be/ENxWNJqcEzw?si=gj6mJ4YxGtFyQw_o

O que é uma função:
<https://youtu.be/TqWqKsoBKya?si=XkV2qZDv8rZ-1qwj>

Classificação das funções: <https://www.todamateria.com.br/funcao/>

Definição de função:
<https://pt.khanacademy.org/math/em-mat-algebra/x34e9dd8107ca5eda:funcao/x34e9dd8107ca5eda:nocoas-basicas-de-funcao/a/definicao-de-funcao>

Conceito de função:
[https://brasilecola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-funcao.htm#:~:text=Uma%20fun%C3%A7%C3%A3o%20%C3%A9%20uma%20rela%C3%A7%C3%A3o,%20C%20sobrejetoras%20e%20simples.&text=Fun%C3%A7%C3%A3o%20%C3%A9%20uma%20regra%20que,\(representado%20pela%20vari%C3%A1vel%20y\).](https://brasilecola.uol.com.br/o-que-e/matematica/o-que-e-funcao.htm#:~:text=Uma%20fun%C3%A7%C3%A3o%20%C3%A9%20uma%20rela%C3%A7%C3%A3o,%20C%20sobrejetoras%20e%20simples.&text=Fun%C3%A7%C3%A3o%20%C3%A9%20uma%20regra%20que,(representado%20pela%20vari%C3%A1vel%20y).)

Lei de formação

A **lei de formação** de uma função é a **fórmula** (ou regra) que expressa a correspondência dos elementos do domínio com os elementos do contradomínio.

Por exemplo:

- Na função afim, a lei geral de formação é $f(x) = ax + b$.
 - $f(x) = 2x + 1$, onde $a = 2$ e $b = 1$;
 - $f(x) = 5x$, onde $a = 5$ e $b = 0$;
 - $f(x) = x - 3$, onde $a = 1$ e $b = -3$.
- Na função quadrática, a lei geral de formação é $f(x) = ax^2 + bx + c$.
 - $f(x) = x^2 + 6x + 2$, onde $a = 1$, $b = 6$ e $c = 2$;
 - $f(x) = -3x^2 + 7$, onde $a = -3$, $b = 0$ e $c = 7$;
 - $f(x) = 2x^2 - 5x - 12$, onde $a = 2$, $b = -5$ e $c = -12$.

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

Observação:

As funções também podem ser classificadas de acordo com suas leis de formação: função afim, função quadrática, função polinomial, função racional, função logarítmica, função exponencial, função trigonométrica etc.

Material complementar:

Lei de formação: <https://youtu.be/gBbY1W6nkGY?si=CU8S63QBp3eY--mp>

Função Afim ou função do 1º grau

A **função afim** é uma função definida como

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \mapsto y = ax + b$$

onde $a \neq 0$ e b são constantes (números reais). Chamamos o número a de **coeficiente angular** e denominamos o termo b de **coeficiente linear**.

Observação

O **domínio** e o **contradomínio** desse tipo de função não tem restrições gerais (somente em casos específicos), podendo ser até o conjunto $\mathbb{R}$.

Gráfico de uma função afim

O **gráfico de uma função afim** é uma reta. O esboço desse gráfico é representado no sistema cartesiano. Para construir esse esboço, basta jogar pontos quaisquer para x e substituir esses valores na fórmula para calcular seu correspondente y .

A inclinação dessa reta depende do coeficiente angular, pois:

- Quando $a > 0$, a reta é **crescente**;
- Quando $a < 0$, a reta é **decrescente**.

Além disso, para determinar as interseções do gráfico com os eixos das abscissas (eixo x) e das ordenadas (eixo y), basta substituir $x = 0$ e $y = 0$, respectivamente. Por isso, podemos afirmar que o coeficiente linear (b) é o local de interseção do gráfico com o eixo y ($y = a \cdot 0 + b \Rightarrow y = b$). Esse método facilita a construção do esboço desse gráfico.

Exemplo (toda matéria): Em uma determinada cidade, a tarifa cobrada pelos taxistas corresponde a uma parcela fixa chamada de bandeirada e uma parcela referente aos quilômetros rodados. Sabendo que uma pessoa pretende fazer uma viagem de 7 km em que o preço da bandeirada é igual a R\$ 4,50 e o custo por quilômetro rodado é igual a R\$ 2,75, determine:

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

a) uma fórmula que expresse o valor da tarifa cobrada em função dos quilômetros rodados para essa cidade.

Sabendo que a bandeirada é um preço fixo e que a cada km rodado o preço a ser pago aumenta (não sabemos quantos km cada cliente percorrerá, então temos uma incógnita), podemos escrever a lei de formação dessa função como

$$y = 4,5 + 2,75x$$

Ou seja, temos que o preço a ser pago no fim da corrida (y) está em função da quantidade de km percorrida pelo cliente (x).

b) quanto irá pagar a pessoa referida no enunciado.

A pessoa do enunciado percorreu 7km, então temos $x = 7$. Substituindo esse valor na lei de formação:

$$y = 4,5 + 2,75 \cdot (7) = 4,5 + 19,25 = 23,75 \text{ reais.}$$

Observe que o coeficiente angular nessa função é $2,75 > 0$, então ela é crescente.

Além disso, o coeficiente linear é 4,5, então o gráfico corta o eixo das ordenadas no ponto $A = (0; 4,5)$. Para determinar o ponto de interseção com o eixo das abscissas, basta fazer usar $y = 0$, assim

$$y = 4,5 + 2,75x \Rightarrow 0 = 4,5 + 2,75x \Rightarrow$$

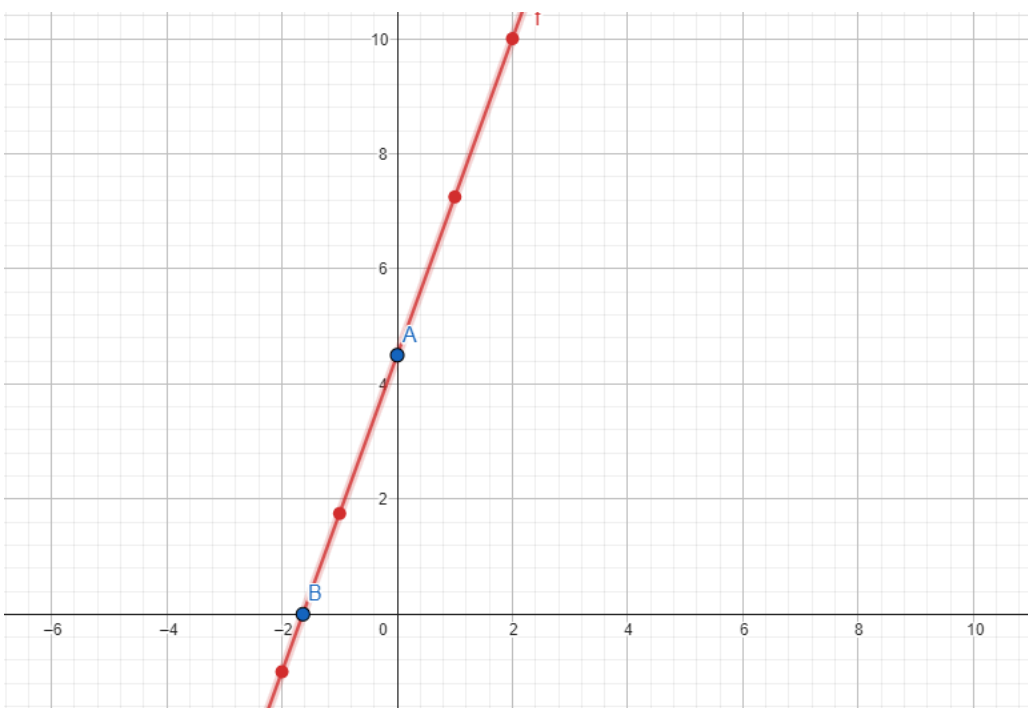
$$\Rightarrow -4,5 = 2,75x \Rightarrow -\frac{4,5}{2,75} = x$$

e o ponto de interseção é $B = (-1,63; 0)$.

● $f : y = 2.75x + 4.5$

● $A = (0, 4.5)$

● $B = \left(-\frac{4.5}{2.75}, 0\right)$



x	y
-2	-1
-1	1,75
0	4,5
1	7,25
2	10

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

Outra maneira de construir o esboço desse gráfico é escolhendo pontos arbitrariamente, como dito antes. Selecione números para o x , substitua-os na função, localize os pontos formados e depois interligue-os.

Material complementar:

Função afim: <https://www.todamateria.com.br/funcao-afim/>

Função afim: <https://youtu.be/nysu0K-VXR8?si=JHItVdIN--kuazmU>

Gráfico de uma função afim: <https://youtu.be/6CtKXNmIScl?si=bQIfvCfBG3fqSVgO>

Função afim: <https://pt.khanacademy.org/math/em-mat-algebra/x34e9dd8107ca5eda:funcao-afim>

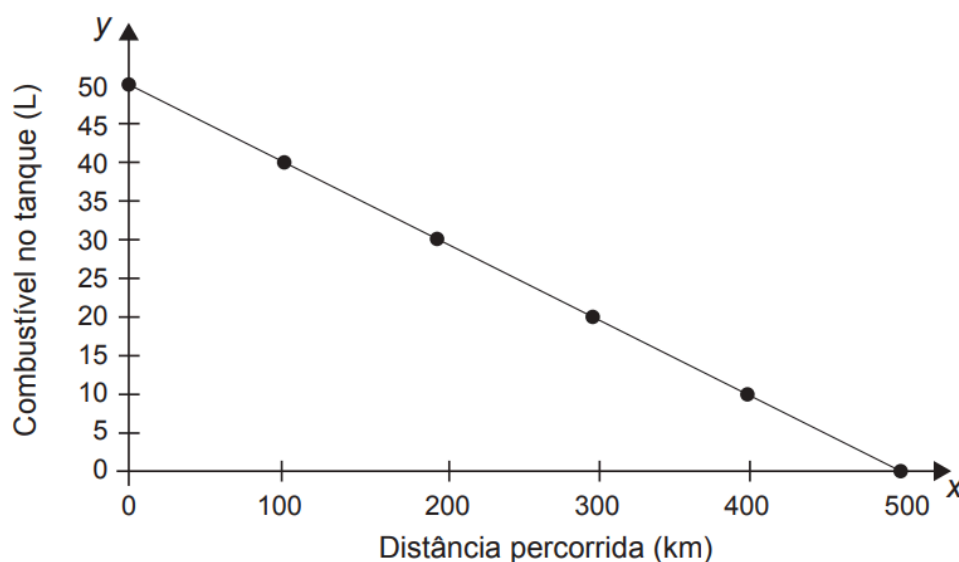
Gráfico de função afim: <https://pt.khanacademy.org/math/em-mat-algebra/x34e9dd8107ca5eda:funcao-afim/x34e9dd8107ca5eda:grafico-da-funcao-afim/e/grafico-de-funcao-afim>

Exercícios

1 - (ENEM 2019) Uma empresa tem diversos funcionários. Um deles é o gerente, que recebe R\$ 1.000,00 por semana. Os outros funcionários são diaristas. Cada um deles trabalha 2 dias por semana, recebendo R\$ 80,00 por dia trabalhado. Chamando de X a quantidade total de funcionários da empresa, a quantia Y , em reais, que esta empresa gasta semanalmente para pagar seus funcionários é expressa por

- A. $Y = 80X + 920$.
- B. $Y = 80X + 1.000$.
- C. $Y = 80X + 1.080$.
- D. $Y = 160X + 840$.
- E. $Y = 160X + 1.000$.

2 - (ENEM PPL 2018) Uma indústria automobilística está testando um novo modelo de carro. Cinquenta litros de combustível são colocados no tanque desse carro, que é dirigido em uma pista de testes até que todo o combustível tenha sido consumido. O segmento de reta no gráfico mostra o resultado desse teste, no qual a quantidade de combustível no tanque é indicada no eixo y (vertical), e a distância percorrida pelo automóvel é indicada no eixo x (horizontal).



CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

A expressão algébrica que relaciona a quantidade de combustível no tanque e a distância percorrida pelo automóvel é

A. $y = -10x + 500$.

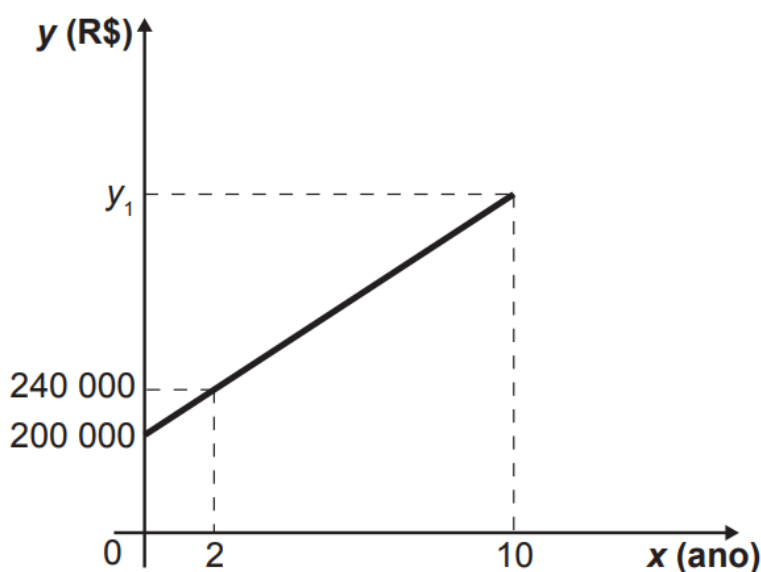
B. $y = \frac{-x}{10} + 50$.

C. $y = \frac{-x}{10} + 500$.

D. $y = \frac{x}{10} + 50$.

E. $y = \frac{x}{10} + 500$.

3 - (ENEM 2017 - LIBRAS) Um sítio foi adquirido por R\$ 200.000,00. O proprietário verificou que a valorização do imóvel, após sua aquisição, cresceu em função do tempo conforme o gráfico, e que essa tendência de valorização se manteve nos anos seguintes.



O valor desse sítio, no décimo ano após sua compra, em real, será de

A. 190.000.

B. 232.000.

C. 272.000.

D. 400.000.

E. 500.000.

Função quadrática ou função do 2º grau

A **função quadrática** é uma função definida como

$$f: A \rightarrow B$$

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

$$x \mapsto y = ax^2 + bx + c$$

onde $a \neq 0$, b e c são constantes (números reais).

Observação

O **domínio** e o **contradomínio** desse tipo de função não tem restrições gerais (somente em casos específicos), podendo ser até o conjunto $\mathbb{R}$.

Gráfico de uma função quadrática

O **gráfico de uma função quadrática** é uma parábola. O esboço desse gráfico é representado no sistema cartesiano. Também é possível construir esse esboço, jogando pontos quaisquer para x e substituindo esses valores na fórmula para calcular seu correspondente y .

O valor do coeficiente a também nos revela aspectos importantes do gráfico:

- Quando $a > 0$, a parábola tem **concavidade** voltada para **cima**;
- Quando $a < 0$, a parábola tem **concavidade** voltada para **baixo**.

Podemos afirmar que o coeficiente c é o local de interseção do gráfico com o eixo y , pois $y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow y = c$.

Outra maneira de construir o esboço desse gráfico é através das interseções da parábola com os eixos cartesianos e pelo vértice da parábola. Para determinar as interseções do gráfico com os eixos das abscissas (eixo x) e das ordenadas (eixo y), basta substituir $x = 0$ e $y = 0$, respectivamente.

Quando fazemos $y = 0$, temos dois possíveis resultados para x , então usamos a **Fórmula de Bhaskara**:

Primeiro determinamos o delta (Δ) e depois calculamos x_1 e x_2 .

- $\Delta = b^2 - 4ac$;
- $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \Rightarrow x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$.

Além disso, o valor de delta nos fornece informações importantes:

- Quando $\Delta > 0$, a parábola tem **duas interseções** com o **eixo x** , ou seja, a função possui duas raízes reais;
- Quando $\Delta = 0$, a parábola tem **uma interseção** com o **eixo x** , ou seja, a função possui uma raiz real;
- Quando $\Delta < 0$, a parábola tem **zero interseções** com o **eixo x** , ou seja, a função não possui raízes reais.

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

Podemos calcular as coordenadas do **ponto mínimo** (quando $\Delta > 0$) ou o **ponto máximo** (quando $\Delta < 0$), que chamamos de **vértice da parábola**, com as seguintes fórmulas:

- $x_v = \frac{-b}{2a}$;
- $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$.

Exemplo (toda matéria): Determine a , b e c na função quadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo:

- $f(-1) = 8$;
- $f(0) = 4$;
- $f(2) = 2$.

Nós conhecemos três pontos e que essa função é do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, então vamos substituir as coordenadas na equação geral:

1. $f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f(-1) = a(-1)^2 + b(-1) + c = 8 \Rightarrow$
 $\Rightarrow a - b + c = 8$;
2. $f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f(0) = a(0)^2 + b(0) + c = 4 \Rightarrow$
 $\Rightarrow c = 4$;
3. $f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f(2) = a(2)^2 + b(2) + c = 2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow 4a + 2b + c = 2$.

Como temos três equações dependendo das mesmas incógnitas (a , b e c), temos um sistema:

$$\begin{cases} a - b + c = 8 \\ c = 4 \\ 4a + 2b + c = 2 \end{cases}$$

Vamos substituir o c nas outras duas equações:

$$\begin{cases} a - b + 4 = 8 \Rightarrow a - b = 4 \\ 4a + 2b + 4 = 2 \Rightarrow 4a + 2b = -2 \end{cases}$$

Vamos isolar o a na primeira equação e substituir na segunda:

$$\begin{cases} a = 4 + b \\ 4(4 + b) + 2b = -2 \Rightarrow 16 + 4b + 2b = -2 \Rightarrow 6b = -18 \Rightarrow b = -3 \end{cases}$$

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

Agora, basta substituir b na primeira equação:

$$a = 4 + b = 4 - 3 = 1.$$

Assim, sabendo que $a = 1$, $b = -3$ e $c = 4$, temos que a lei de formação da função em questão é

$$f(x) = ax^2 + bx + c = x^2 - 3x + 4.$$

Para construir o **esboço desse gráfico**, vamos seguir o passo a passo:

1. Interseção com o eixo y :

a. Temos que $x = 0$, assim $y = 4$.

2. Interseção com o eixo x :

a. $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4(1)(4) = 9 - 16 = -7 < 0$, então não há interseção com o eixo x . Assim, nem precisamos calcular x_1 e x_2 .

3. Vértice da parábola:

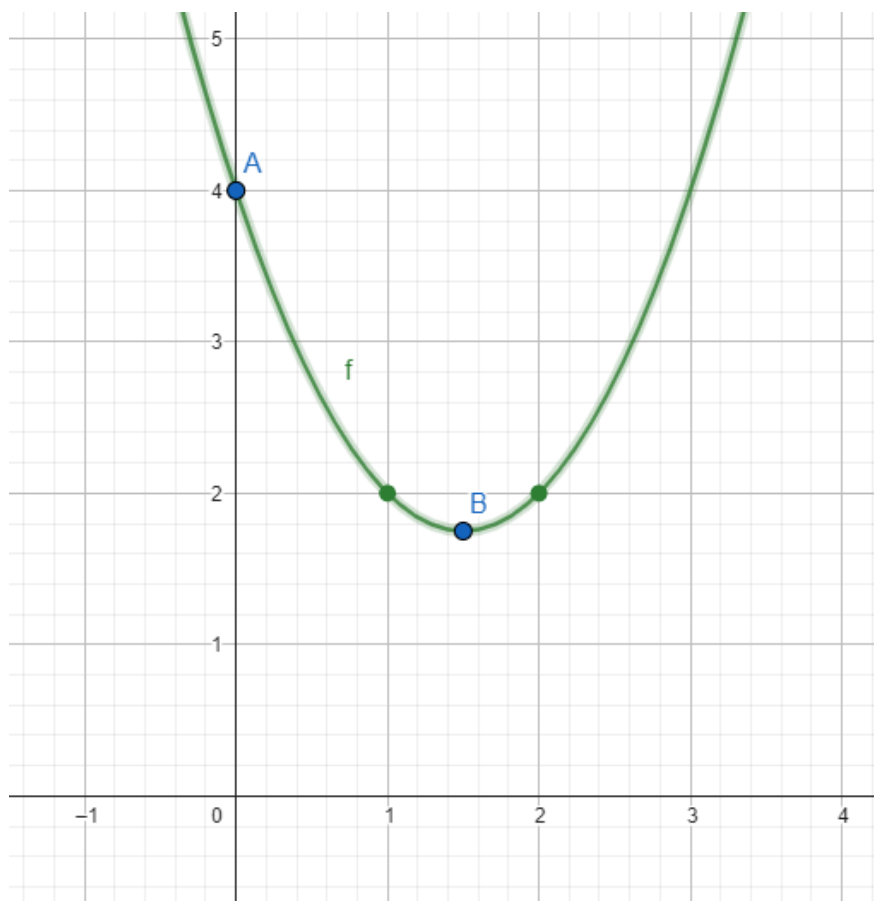
a. Como $1 > 0$, então a parábola tem concavidade voltada para cima.

$$\text{i. } x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-3)}{2(1)} = \frac{3}{2} = 1,5;$$

$$\text{ii. } y_v = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(-7)}{4(1)} = \frac{7}{4} = 1,75.$$

Assim, o vértice dessa parábola é o ponto $(1,5; 1,75)$.

	$f: y = x^2 - 3x + 4$
	$A = (0, 4)$
	$B = (1,5, 1,75)$



x	y
-2	14
-1	8
0	4
1	2
2	2

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

Outra maneira de construir o esboço desse gráfico é escolhendo pontos arbitrariamente, como dito antes. Selecione números para o x , substitua-os na função, localize os pontos formados e depois interligue-os.

Material complementar:

Função quadrática: <https://www.todamateria.com.br/funcao-quadratica/>

Função quadrática: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/funcao-de-segundo-grau.htm>

Função quadrática: https://youtu.be/lfTsMZpH_tA?si=ysqbUBucWVnCaNL5

Raízes da função quadrática: <https://youtu.be/a0ndXBGjqCU?si=ljKav3DIOWyYQuO->

Função quadrática e seu gráfico: <https://youtu.be/ZpW9Xb5iyt4?si=8JWy9UW1f2psZPWW>

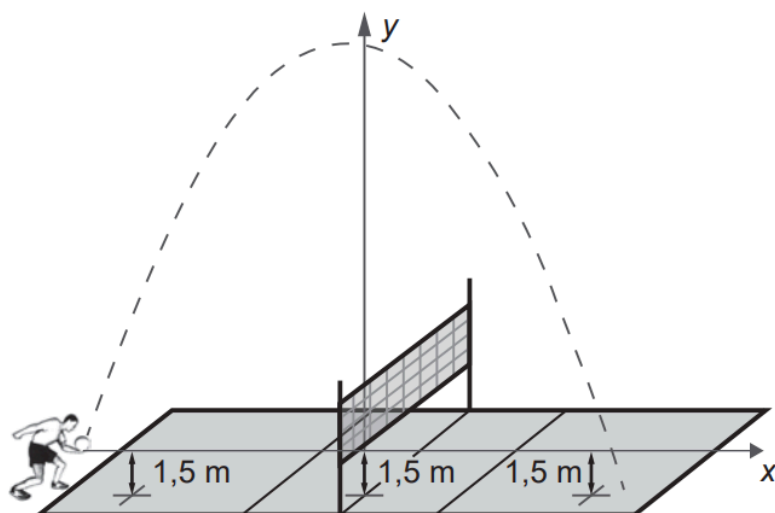
Prática da função quadrática: <https://pt.khanacademy.org/math/em-mat-algebra/x34e9dd8107ca5eda:funcao-quadratica>

Exercícios

4 - (ENEM 2022) Em jogos de voleibol, um saque é invalidado se a bola atingir o teto do ginásio onde ocorre o jogo. Um jogador de uma equipe tem um saque que atinge uma grande altura. Seu recorde foi quando a batida do saque se iniciou a uma altura de 1,5 m do piso da quadra, e a trajetória da bola foi descrita pela parábola $y = -\frac{x^2}{6} - \frac{7x}{3} + 12$, em que y representa a altura da bola em relação ao eixo x (das abscissas) que está localizado a 1,5 m do piso da quadra, como representado na figura. Suponha que em todas as partidas algum saque desse jogador atinja a mesma altura do seu recorde.

A equipe desse jogador participou de um torneio de voleibol no qual jogou cinco partidas, cada uma delas em um ginásio diferente. As alturas dos tetos desses ginásios, em relação aos pisos das quadras, são:

- ginásio I: 17 m;
- ginásio II: 18 m;
- ginásio III: 19 m;
- ginásio IV: 21 m;
- ginásio V: 40 m.



CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

O saque desse atleta foi invalidado

- A. apenas no ginásio I.
- B. apenas nos ginásios I e II.
- C. apenas nos ginásios I, II e III.
- D. apenas nos ginásios I, II, III e IV.
- E. em todos os ginásios.

5 - (ENEM 2022) Ao analisar os dados de uma epidemia em uma cidade, peritos obtiveram um modelo que avalia a quantidade de pessoas infectadas a cada mês, ao longo de um ano. O modelo é dado por $p(t) = -t^2 + 10t + 24$, sendo t um número natural, variando de 1 a 12, que representa os meses do ano, e $p(t)$ a quantidade de pessoas infectadas no mês t do ano. Para tentar diminuir o número de infectados no próximo ano, a Secretaria Municipal de Saúde decidiu intensificar a propaganda oficial sobre os cuidados com a epidemia. Foram apresentadas cinco propostas (I, II, III, IV e V), com diferentes períodos de intensificação das propagandas:

- I: $1 \leq t \leq 2$;
- II: $3 \leq t \leq 4$;
- III: $5 \leq t \leq 6$;
- IV: $7 \leq t \leq 9$;
- V: $10 \leq t \leq 12$.

A sugestão dos peritos é que seja escolhida a proposta cujo período de intensificação da propaganda englobe o mês em que, segundo o modelo, há a maior quantidade de infectados. A sugestão foi aceita. A proposta escolhida foi a

- A. I.
- B. II.
- C. III.
- D. IV.
- E. V.

6 - (ENEM 2017 - LIBRAS) A única fonte de renda de um cabeleireiro é proveniente de seu salão. Ele cobra R\$ 10,00 por cada serviço realizado e atende 200 clientes por mês, mas está pensando em aumentar o valor cobrado pelo serviço. Ele sabe que cada real cobrado a mais acarreta uma diminuição de 10 clientes por mês.

Para que a renda do cabeleireiro seja máxima, ele deve cobrar por serviço o valor de

- A. R\$ 10,00.
- B. R\$ 10,50.
- C. R\$ 11,00.
- D. R\$ 15,00.
- E. R\$ 20,00.

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

Função exponencial

A **função exponencial** é uma função definida como

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \mapsto y = a^x$$

onde $a > 0$ e $a \neq 1$ é constante (número real) e denominado de **base**.

Observação

A **imagem** dessa função sempre será positiva. Então o **contradomínio** B está restrito para até $\mathbb{R}_+^*$. O **domínio** não tem restrições (somente em casos específicos), podendo ser até o conjunto $\mathbb{R}$.

Gráfico de uma função exponencial

Os pontos do **gráfico de uma função exponencial** pertencem no primeiro e segundo quadrantes do sistema cartesiano, pois, como $a \neq 0$, o gráfico não intercepta o eixo x . Além disso, esse gráfico sempre intercepta o eixo y quando $y = 1$, pois, independente da base, $a^0 = 1$.

É necessário construir o esboço desse gráfico jogando pontos quaisquer para x e substituindo esses valores na fórmula para calcular seu correspondente y .

O valor do coeficiente a também nos revela aspectos importantes do gráfico:

- Quando $0 < a < 1$, a função é **decrecente** (Jogando valores para x , percebemos que quando x aumenta, y diminui);
- Quando $a > 1$, a função é **crescente** (Jogando valores para x , percebemos que quando x aumenta, y também aumenta).

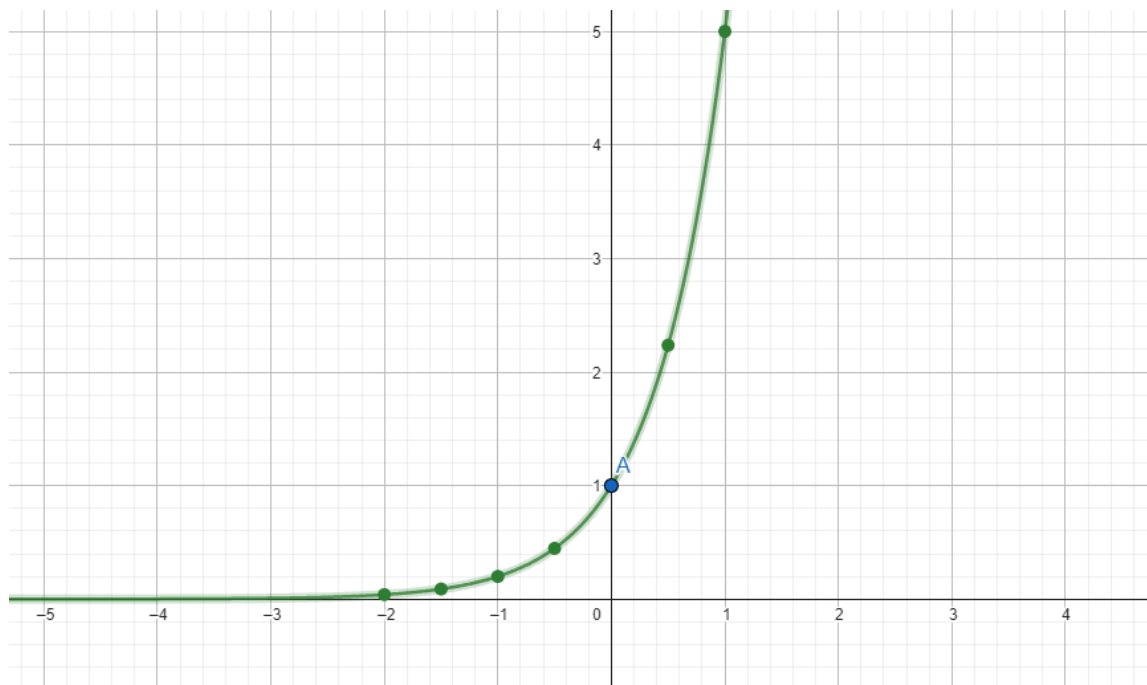
Exemplo: Construa o esboço do gráfico da função $y = 5^x$.

Primeiro, observe que a função é crescente, pois $5 > 1$. Agora, vamos montar uma tabela com alguns valores de x e seu y correspondente. Agora, basta localizar esses pontos no sistema cartesiano e os interligar.

x	y
-----	-----

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

- 2	0,04
- 1,5	0,089
- 1	0,2
- 0,5	0,447
0	1
0,5	2,236
1	5
1,5	11,18
2	25



Exemplo: Construa o esboço do gráfico da função $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Novamente, vamos observar que, como $0 > \frac{1}{3} > 1$, então a função é decrescente. Agora, vamos escolher alguns pontos para x e determinar seu correspondente y .

Depois, basta localizar esses pontos e os interligar, como na imagem abaixo.

x	y
- 2	9
- 1	3
0	1
1	$0, \bar{3}$
2	$0, \bar{1}$



CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

Material complementar:

Função					exponencial:
					https://brasilecola.uol.com.br/matematica/funcao-exponencial-1.htm
Definição	e	gráfico	de	função	exponencial:
					https://youtu.be/3lR3guqfbUg?si=Ub1Z7Rb8ERHskLf-
Exemplos		de		função	exponencial:
					https://youtu.be/gMGz-dB9few?si=SzXBiFbUSHxjJIK4
Crescimento	e		decaimento		exponencial:
					https://pt.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:exponential-growth-decay

Exercícios

7 - (ENEM 2020) Enquanto um ser está vivo, a quantidade de carbono 14 nele existente não se altera. Quando ele morre, essa quantidade vai diminuindo. Sabe-se que a meia-vida do carbono 14 é de 5.730 anos, ou seja, num fóssil de um organismo que morreu há 5.730 anos haverá metade do carbono 14 que existia quando ele estava vivo. Assim, cientistas e arqueólogos usam a seguinte fórmula

para saber a idade de um fóssil encontrado: $Q(t) = Q_0 \cdot 2^{\frac{-t}{5.730}}$ em que t é o tempo, medido em ano, $Q(t)$ é a quantidade de carbono 14 medida no instante t e Q_0 é a quantidade de carbono 14 no ser vivo correspondente.

Um grupo de arqueólogos, numa de suas expedições, encontrou 5 fósseis de espécies conhecidas e mediram a quantidade de carbono 14 neles existente. Na tabela temos esses valores juntamente com a quantidade de carbono 14 nas referidas espécies vivas.

Fóssil	Q_0	$Q(t)$
1	128	32
2	256	8
3	512	64
4	1 024	512
5	2 048	128

O fóssil mais antigo encontrado nessa expedição foi

- A. 1.
- B. 2.

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

- C. 3.
- D. 4.
- E. 5.

8 - (ENEM 2015) O acréscimo de tecnologias no sistema produtivo industrial tem por objetivo reduzir custos e aumentar a produtividade. No primeiro ano de funcionamento, uma indústria fabricou 8.000 unidades de um determinado produto. No ano seguinte, investiu em tecnologia adquirindo novas máquinas e aumentou a produção em 50%.

Estima-se que esse aumento percentual se repita nos próximos anos, garantindo um crescimento anual de 50%. Considere P a quantidade anual de produtos fabricados no ano t de funcionamento da indústria.

Se a estimativa for alcançada, qual é a expressão que determina o número de unidades produzidas P em função de t , para $t \geq 1$?

- A. $P(t) = 0,5 \cdot t^{-1} + 8.000$.
- B. $P(t) = 50 \cdot t^{-1} + 8.000$.
- C. $P(t) = 4.000 \cdot t^{-1} + 8.000$.
- D. $P(t) = 8.000 \cdot (0,5)^{t-1}$.
- E. $P(t) = 8.000 \cdot (1,5)^{t-1}$.

9 - (ENEM - PPL - 2015) O sindicato de trabalhadores de uma empresa sugere que o piso salarial da classe seja de R\$ 1.800,00, propondo um aumento percentual fixo por cada ano dedicado ao trabalho. A expressão que corresponde à proposta salarial (s), em função do tempo de serviço (t), em anos, é $s(t) = 1.800 \cdot (1,03)^t$.

De acordo com a proposta do sindicato, o salário de um profissional dessa empresa com 2 anos de tempo de serviço será, em reais,

- A. 7.416,00.
- B. 3.819,24.
- C. 3.709,62.
- D. 3.708,00.
- E. 1.909,62.

Função logarítmica

A **função logarítmica** é a função inversa à função exponencial. Ela é definida como

$$f: A \rightarrow B$$

$$x \mapsto y = \log_a x$$

onde $a > 0$ e $a \neq 1$ é constante (número real) e denominado de **base**.

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

Nós associamos a função logarítmica com a função exponencial da seguinte maneira:

$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

Observação

O **domínio** dessa função sempre será $(\mathbb{R}_+^*)$ positivo. O **contradomínio** não tem restrições (somente em casos específicos), podendo ser até o conjunto $\mathbb{R}$.

Gráfico de uma função logarítmica

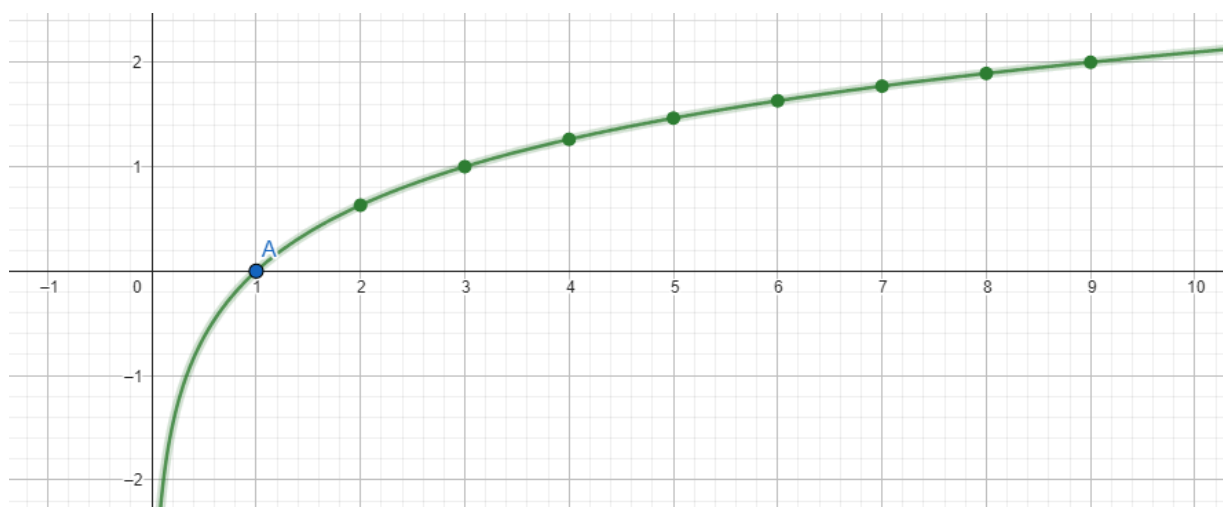
Os pontos do **gráfico de uma função logarítmica** pertencem ao primeiro e quarto quadrantes do sistema cartesiano, pois o gráfico não intercepta o eixo x . Além disso, esse gráfico sempre intercepta o eixo y quando $y = 1$, pois, independente da base, $a^0 = 1$.

É necessário construir o esboço desse gráfico jogando pontos quaisquer para x e substituindo esses valores na fórmula para calcular seu correspondente y .

O valor do coeficiente a também nos revela aspectos importantes do gráfico:

- Quando $0 < a < 1$, a função é **decrescente** (Jogando valores para x , percebemos que quando x aumenta, y diminui);
- Quando $a > 1$, a função é **crescente** (Jogando valores para x , percebemos que quando x aumenta, y também aumenta).

x	y
0	$-\infty$
1	0
2	0,63
3	1
4	1,261
5	1,464
9	2



CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

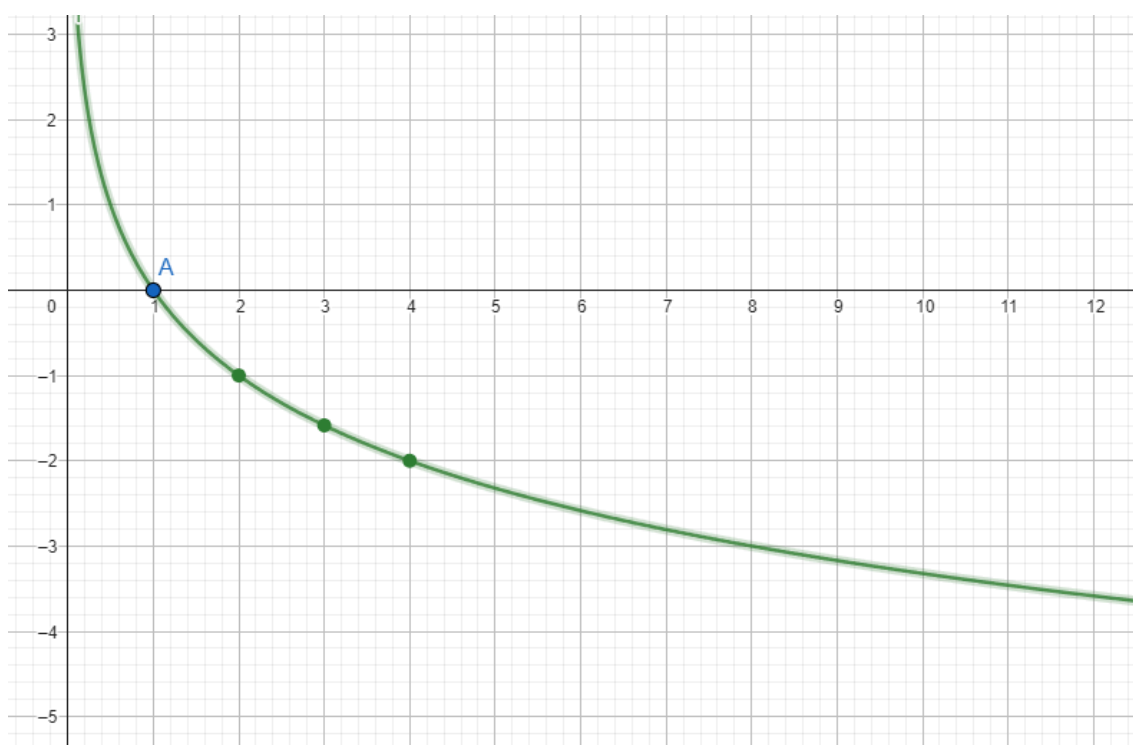
Exemplo: Construa o esboço do gráfico da função $y = \log_3 x$. Primeiro, observe que a função é crescente, pois $3 > 1$. Agora, vamos montar uma tabela com alguns valores de x e seu y correspondente. Depois, basta localizar esses pontos e os interligar, como na imagem abaixo.

Exemplo: Construa o esboço do gráfico da função $y = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Primeiro, observe que a função é decrescente, pois $\frac{1}{2} < 1$. Agora, vamos montar uma tabela com alguns valores de x e seu y correspondente.

Depois, basta localizar esses pontos e os interligar, como na imagem abaixo.

x	y
0	∞
1	0
2	-1
3	-1,5
4	-2



Propriedades de operações com logaritmos

Considerando $a \neq 1$, b e x número reais positivos, temos as seguintes propriedades:

- $\log_a(x \cdot b) = \log_a x + \log_a b$;
- $\log_a(x \div b) = \log_a x - \log_a b$;
- $\log_a(x^b) = b \cdot \log_a x$.

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

Material complementar:

Função logarítmica:
<https://brasilecola.uol.com.br/matematica/funcao-logaritmica.htm>
 Função logarítmica: https://youtu.be/P8uxcolt8OQ?si=_VWSinp_v-etwnbL
 Exercícios com logaritmos:
https://youtu.be/MVZKF_W2Hd0?si=A_SzsUHbnIWuJaKO
 Gráfico da função logarítmica:
<https://youtu.be/IVE1UtgndrU?si=nQHtQs30xauBqHVb>
 Módulo de função logarítmica:
<https://pt.khanacademy.org/math/em-mat-algebra2/x1d9e5bc8bde7b21:funcao-logaritmica>

Exercícios

10 - (ENEM 2019) Charles Richter e Beno Gutenberg desenvolveram a escala Richter, que mede a magnitude de um terremoto. Essa escala pode variar de 0 a 10, com possibilidades de valores maiores. O quadro mostra a escala de magnitude local (M_s) de um terremoto que é utilizado para descrevê-lo.

Descrição	Magnitude local (M_s) ($\mu m \cdot Hz$)
Pequeno	$0 \leq M_s \leq 3,9$
Ligeiro	$4,0 \leq M_s \leq 4,9$
Moderado	$5,0 \leq M_s \leq 5,9$
Grande	$6,0 \leq M_s \leq 9,9$
Extremo	$M_s \geq 10,0$

Para se calcular a magnitude local, usa-se a fórmula $M_s = 3,30 + \log(A \cdot f)$, em que A representa a amplitude máxima da onda registrada por um sismógrafo em micrômetro (μm) e f representa a frequência da onda, em hertz (Hz). Ocorreu um terremoto com amplitude máxima de $2.000 \mu m$ e frequência de $0,2 Hz$.

Disponível em: <http://cejarj.cecierj.edu.br>. Acesso em: 1 fev. 2015 (adaptado).

Utilize 0,3 como aproximação para $\log 2$. De acordo com os dados fornecidos, o terremoto ocorrido pode ser descrito como

- A. Pequeno.
- B. Ligeiro.



PROFMAT



Universidade Federal
de São João del-Rei

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

C. Moderado.

D. Grande.

E. Extremo.

11 - (ENEM 2020) A Lei de Zipf, batizada com o nome do linguista americano George Zipf, é uma lei empírica que relaciona a frequência (f) de uma palavra em um dado texto com o seu ranking (r). Ela é dada por

$$f = \frac{A}{r^B}.$$

O ranking da palavra é a sua posição ao ordenar as palavras por ordem de frequência. Ou seja, $r = 1$ para a palavra mais frequente, $r = 2$ para a segunda palavra mais frequente e assim sucessivamente. A e B são constantes positivas.

Disponível em: <http://klein.sbm.org.br>. Acesso em: 12 ago. 2020 (adaptado).

Com base nos valores de $X = \log(r)$ e $Y = \log(f)$, é possível estimar valores para A e B. No caso hipotético em que a lei é verificada exatamente, a relação entre Y e X é

A. $Y = \log A - B \cdot X$.

B. $Y = \frac{\log A}{X + \log B}$.

C. $Y = \frac{\log A}{B} - X$.

D. $Y = \frac{\log A}{B \cdot X}$.

E. $Y = \frac{\log A}{X^B}$.

12 - (ENEM 2018 - LIBRAS) Com o avanço em ciência da computação, estamos próximos do momento em que o número de transistores no processador de um computador pessoal será da mesma ordem de grandeza que o número de neurônios em um cérebro humano, que é da ordem de 100 bilhões. Uma das grandezas determinantes para o desempenho de um processador é a densidade de transistores, que é o número de transistores por centímetro quadrado.

Em 1986, uma empresa fabricava um processador contendo 100.000 transistores distribuídos em $0,25 \text{ cm}^2$ de área. Desde então, o número de transistores por centímetro quadrado que se pode colocar em um processador dobra a cada dois anos (Lei de Moore).

Disponível em: www.pocket-lint.com. Acesso em: 1 dez. 2017 (adaptado).

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

Considere 0,30 como aproximação para $\log_{10} 2$. Em que ano a empresa atingiu ou atingirá a densidade de 100 bilhões de transistores?

- A. 1999.
- B. 2002.
- C. 2022.
- D. 2026.
- E. 2146.

Função modular

O **módulo** de um número é sempre positivo. Se temos x (número positivo), então $|x| = x$. Se temos $-x$ (número negativo), então $|-x| = -(-x) = x$.

A **função modular** é uma função definida como

$$f: A \rightarrow B$$
$$x \mapsto y = |x|$$

onde:

- $|x| = x$, quando $x \geq 0$.
- $|x| = -x$, quando $x < 0$.

Observações

1. O **domínio** desse tipo de função não tem restrições gerais (somente em casos específicos), podendo ser até o conjunto $\mathbb{R}$. Já o **contradomínio** pertence ao conjunto dos reais não negativos ($\mathbb{R}_+$).
2. Uma função é considerada modular quando pelo menos uma variável está dentro do módulo. Assim, existem diferentes funções modulares a depender do tipo de equação que está dentro do módulo (pode ser uma equação de 1º grau, de 2º grau, exponencial etc.).

Gráfico de uma função modular

Os pontos do **gráfico de uma função modular** pertencem ao primeiro e segundo quadrantes do sistema cartesiano, pois a imagem da função é sempre maior do que ou igual a zero. Além disso, o gráfico de uma função modular é simétrico e essa simetria vai depender do tipo de função dentro do módulo:

- Quando a função dentro do módulo é a função afim, a reta que determina a simetria é a reta paralela ao eixo y quando fazemos $y = 0$.

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

- Quando a função dentro do módulo é a função quadrática, a reta que determina a simetria é a reta que passa pelo vértice da parábola.

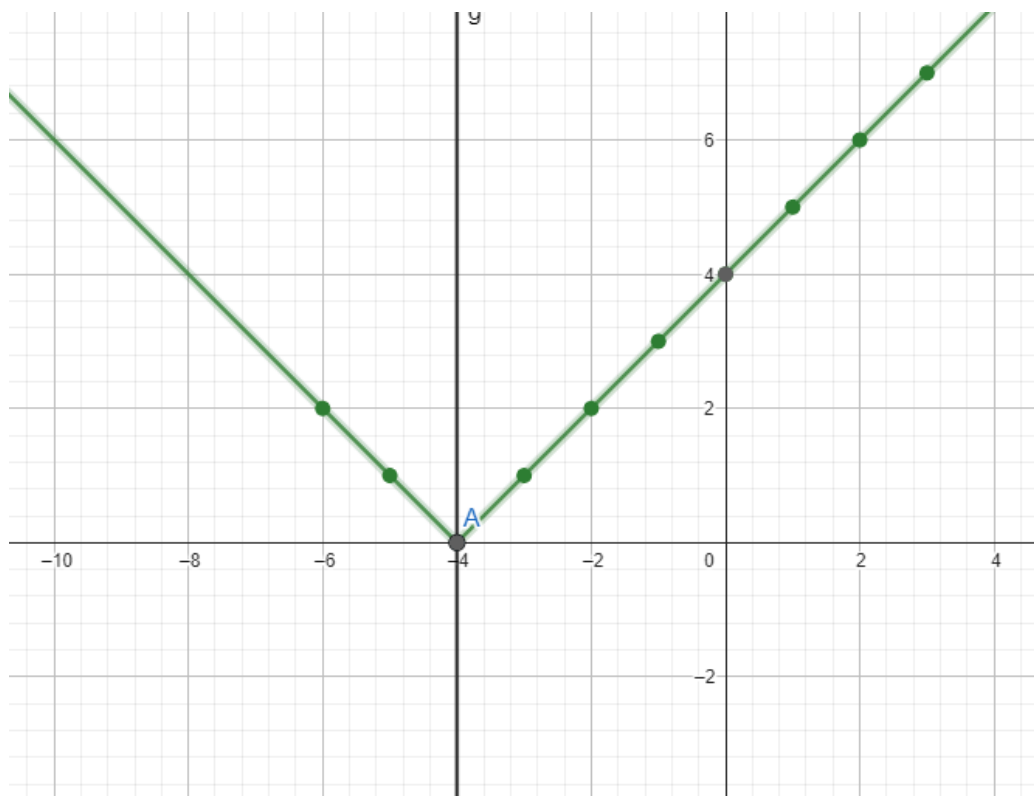
É necessário construir o esboço desse gráfico jogando pontos quaisquer para x e substituindo esses valores na fórmula para calcular seu correspondente y .

Exemplo: Construa o esboço do gráfico da função $y = |x + 4|$.

Primeiro, observe que a função é crescente, pois $5 > 1$. Agora, vamos montar uma tabela com alguns valores de x e seu y correspondente.

x	y
-6	2
-5	1
-4	0
-3	1
-2	2
-1	3
0	4
1	5
2	6

Depois, basta localizar esses pontos e os interligar, como na imagem abaixo.



Exemplo: construa o esboço do gráfico da função $y = |x^2 - x|$.

Primeiro, observe que a função é crescente, pois $5 > 1$. Agora, vamos montar uma tabela com alguns valores de x e seu y correspondente.

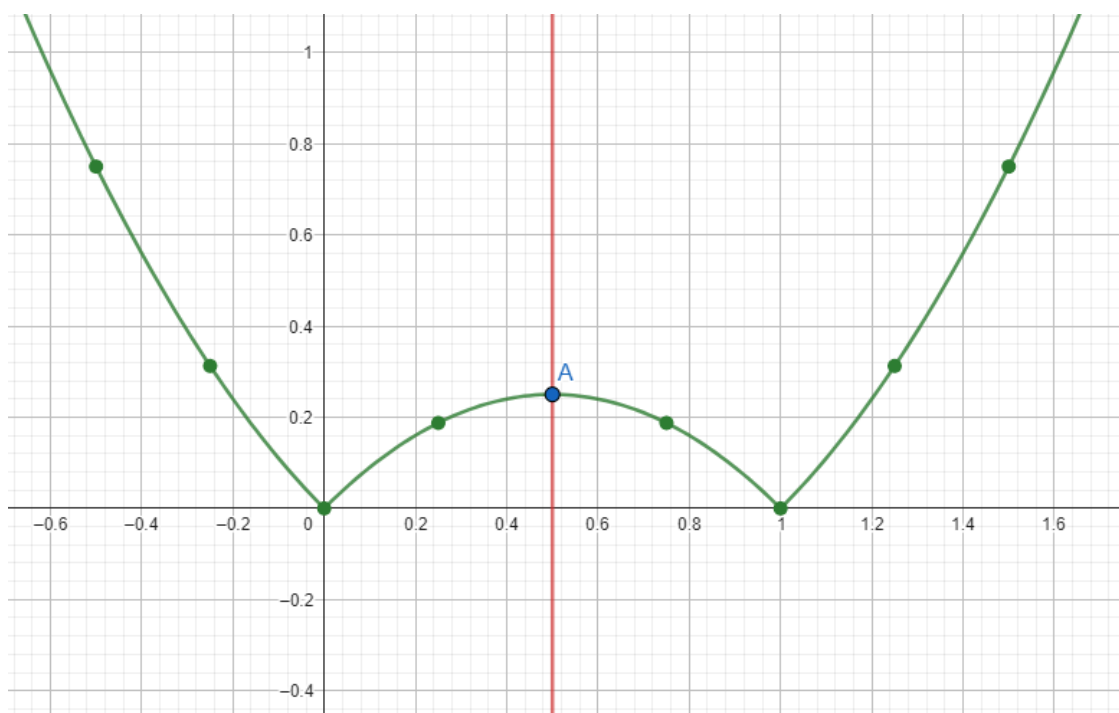
Depois, basta localizar esses pontos e os interligar.

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

Uma informação importante que devemos nos atentar é que o vértice da equação $x^2 - x$ é o ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, pois

- $x_v = \frac{-b}{2(a)} = \frac{-(-1)}{2(1)} = \frac{1}{2}$ e $y_v = \frac{-\Delta}{4(a)} = \frac{-(1)}{4(1)} = \frac{-1}{4}$. Mas pela definição de função modular, nenhuma imagem y pode ser negativa, então pegamos o seu simétrico $(| -\frac{1}{4} | = -(-\frac{1}{4}) = \frac{1}{4})$.

x	y
- 0,5	0,75
- 0,25	0,312
0	0
0,25	0,187
0,5	0,25
0,75	0,187
1	0
1,25	0,312
1,5	0,75



Propriedades de operações com módulo

Considere x e y como números reais. Assim, temos:

- $|x| = | - x|$;
- $|x^2| = |x|^2 = x^2$;
- $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;
- $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Material complementar:

Função modular: <https://www.todamateria.com.br/funcao-modular/>

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

Função modular: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/funcao-modular.htm>

Função modular: <https://youtu.be/l4cezu2Z35U?si=2a495CkgMr09WIY0>

Gráfico de uma função modular:
<https://youtu.be/pmZdHEsr5LM?si=1oiBXtR5uHEpJs9I>

Gráfico de uma função modular:
<https://pt.khanacademy.org/math/algebra/x2f8bb11595b61c86:absolute-value-piecewise-functions/x2f8bb11595b61c86:graphs-of-absolute-value-functions/v/shifting-absolute-value-graphs>

Resolução de equações modulares:
<https://pt.khanacademy.org/math/algebra-home/alg-absolute-value/alg-absolute-value-equations/v/absolute-value-equations>

Exercícios

13 - (Mundo Educação) Dada a função modular $f(x) = |2 - x| - 2$, escreva a função sem utilizar módulo nas sentenças.

14 - (Puc – MG) O gráfico da função $f(x) = |x| + 2$ é constituído por:

- A. duas semirretas de mesma origem.
- B. duas retas concorrentes.
- C. duas retas paralelas.
- D. uma única reta que passa pelo ponto (0,2).

Gráficos

Os **gráficos são representações visuais que facilitam a análise de dados**. Então, os gráficos são ferramentas utilizadas para organizar informações e que ajudam a evidenciar padrões e tendências. Além disso, também permitem comparações de dados de uma grandeza para outra. Existem diversos tipos de gráficos.

Gráfico de barras

É a comparação de dados através de retângulos de mesma largura. A altura desses retângulos é proporcional ao dado relacionado, ou seja, quanto maior a medida de um dado, maior deve ser a altura do retângulo. Além disso, as colunas podem estar dispostas de forma vertical ou horizontal.

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

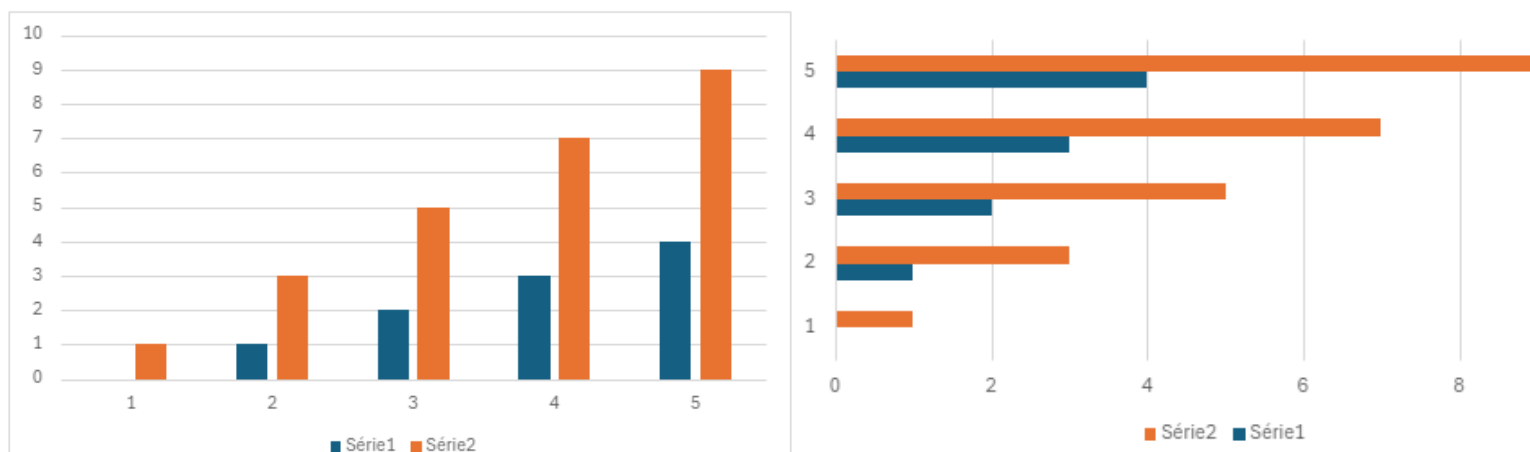


Gráfico de linha

É utilizado para analisar dados em determinado período de tempo. Comparando com o plano cartesiano, o eixo x representa o tempo e o eixo y representa o outro dado em questão. Com esse tipo de gráfico, é possível ter melhor visualização do crescimento ou do decrescimento da grandeza analisada.

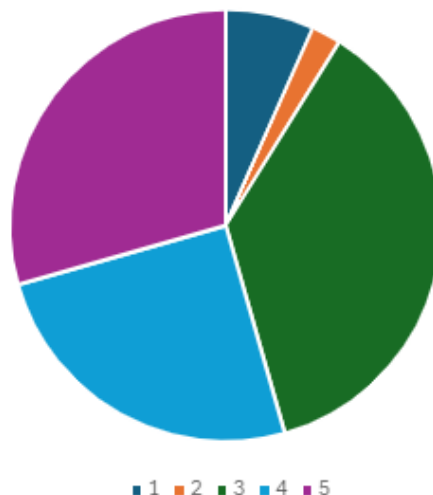
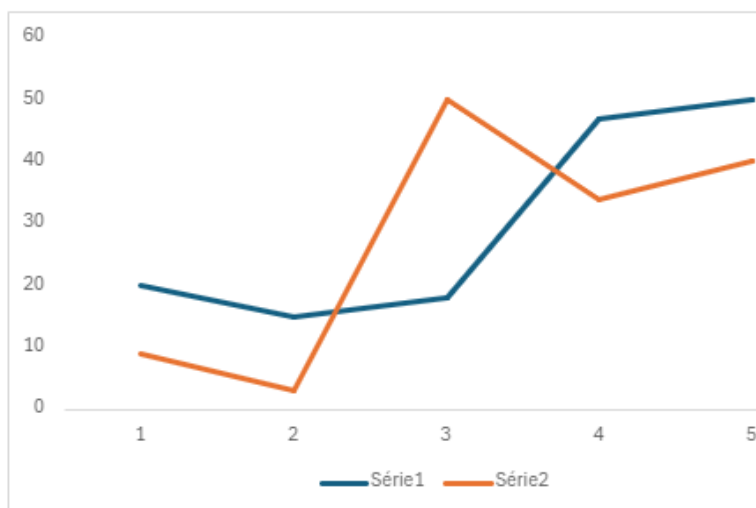


Gráfico de setores

É utilizado para reunir os dados em um círculo dividido em setores. As áreas dos setores são proporcionais aos valores da grandeza analisada, ou seja, quanto maior for o dado, maior será o setor que o representará.

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

Material complementar:

Gráficos: <https://brasilecola.uol.com.br/matematica/graficos.htm>

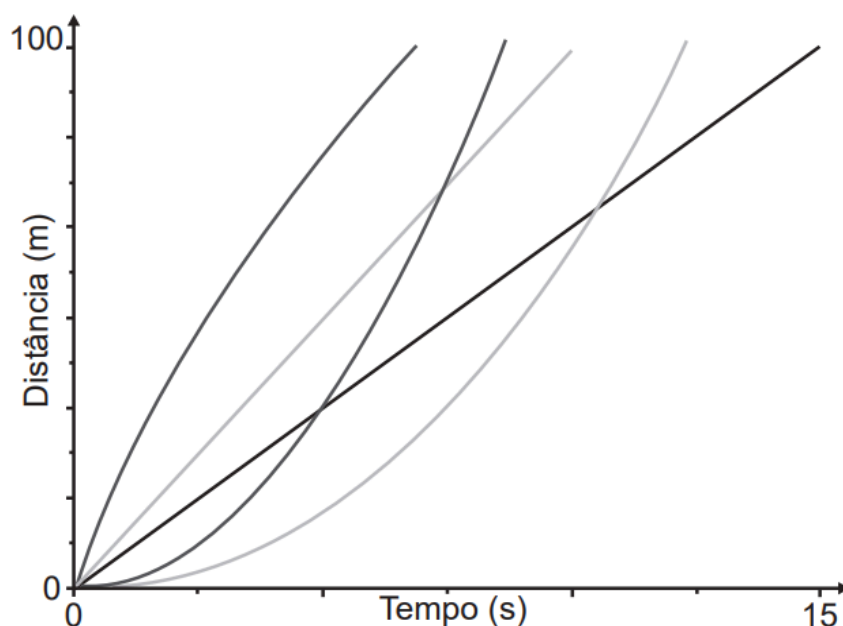
Tipos de Gráficos: <https://www.todamateria.com.br/tipos-de-graficos/>

Construção de gráficos: <https://youtu.be/ZBrclxku1sw?si=lbaaK8-bWatJalAK>

Construção e interpretação de Gráficos no GeoGebra:
https://youtu.be/WNqCVKTIYEA?si=INE106jWy_fEvW3e

Exercícios

15 - (ENEM 2022) Em uma competição de velocidade, diz-se que há uma ultrapassagem quando um veículo que está atrás de outro passa à sua frente, com ambos se deslocando no mesmo sentido. Considere uma competição automobilística entre cinco carros em uma pista com 100 m de comprimento, onde todos largam no mesmo instante e da mesma linha. O gráfico mostra a variação da distância percorrida por cada veículo, em função do tempo, durante toda a competição.

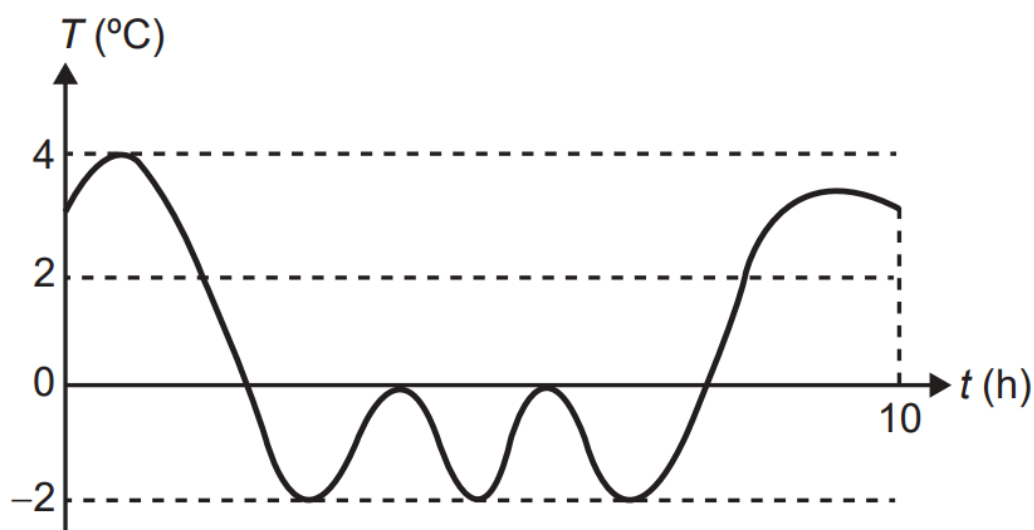


Qual o número de ultrapassagens, após o início da competição, efetuadas pelo veículo que chegou em último lugar?

- A. 0.
- B. 1.
- C. 2.
- D. 3.
- E. 4.

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

16 - (ENEM 2022) Uma máquina em operação tem sua temperatura T monitorada por meio de um registro gráfico, ao longo do tempo t . Essa máquina possui um pistão cuja velocidade V varia com a temperatura T da máquina, de acordo com a expressão $V = T^2 - 4$. Após a máquina funcionar durante o intervalo de tempo de 10 horas, o seu operador analisa o registro gráfico, apresentado na figura, para avaliar a necessidade de eventuais ajustes, sabendo que a máquina apresenta falhas de funcionamento quando a velocidade do pistão se anula.



Quantas vezes a velocidade do pistão se anulou durante as 10 horas de funcionamento?

- A. 1.
- B. 2.
- C. 3.
- D. 4.
- E. 5.



PROFMAT



Universidade Federal
de São João del-Rei

CONEXÃO: PROFMAT – UFSJ – ENSINO BÁSICO

GABARITO

EXERCÍCIO	ALTERNATIVA
1	D
2	B
3	D
4	D
5	C
6	D
7	B
8	E

EXERCÍCIO	ALTERNATIVA
9	E
10	C
11	A
12	C
13	-
14	A
15	A
16	E